Práctica Nº 3

CIRCUITOS RC

1.- INTRODUCCION.

En esta práctica se estudiará el comportamiento de circuitos RC. En una primera etapa se analizará el fenómeno de carga y descarga de un condensador y a partir de un análisis adecuado de los resultados experimentales se calculará la constante de tiempo característica del circuito. En una segunda etapa se trabajará en un régimen periódico. Para ello se utilizará una fuente sinusoidal y se introducirá la noción de *fasores.*

2.- FUNDAMENTO TEÓRICO.

Consideremos un circuito **RC** como el que se muestra en la figura 1, consistente en una resistencia **R** y un condensador **C**. Para simplificar el problema supondremos que la fuente utilizada es ideal.

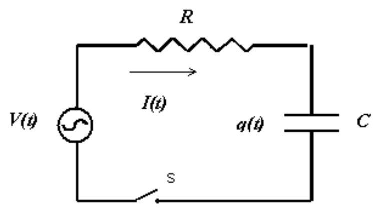


Figura 1
Esquema de un circuito RC.

La caída de potencial entre los extremos de la resistencia **R**, suponiendo que sea óhmica, para todo instante de tiempo está dada por:

$$V_R(t)=R\,.\,I(t) \tag{1}$$

Para el condensador **C**, la caída de potencial entre sus bornes es proporcional a la carga eléctrica total almacenada entre sus placas:

$$V_C(t)=\frac{q(t)}{C} \tag{2}$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito, se obtiene:

$$V(t)-V_r(t)-V_c(t)=0 \Rightarrow V(t)-R\ I(t)-\frac{q(t)}{C}=0 \tag{3}$$

Por otro lado, la corriente eléctrica es, por definición, la cantidad de carga eléctrica que circula por un conductor por unidad de tiempo. Cuando el conductor está conectado a un condensador, la carga que lo atraviesa se acumula en una de la placa a la que llega. De ahí tendremos que la corriente que circula por el condensador está dada por:

$$I(t)=\frac{dq(t)}{dt} \tag{4}$$

Sustituyendo en la ec.3 se obtiene la siguiente ecuación diferencial que gobierna el comportamiento del circuito:

$$\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{RC}=\frac{V(t)}{R} \qquad (5)$$

1.2 Carga y descarga de un condensador.

Consideremos en primer lugar que sucede cuando se utiliza una fuente de corriente continua. Supongamos que en el instante $t = 0$ se cierra el interruptor *S*, figura 1. La carga en el condensador es cero y la corriente inicial en el circuito es $\mathbf{I_o}$, dada por:

$$I_o(0)=\frac{V(0)}{R}$$

Cuando el condensador se carga hasta su valor máximo, la corriente en el circuito es cero, y se obtiene la carga máxima: $Q=C.V$.

Resolviendo la ec. 5 se obtiene la siguiente expresión para la intensidad de corriente:

$$I(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (6)$$

donde $\tau=RC$ es la constante de tiempo del circuito.

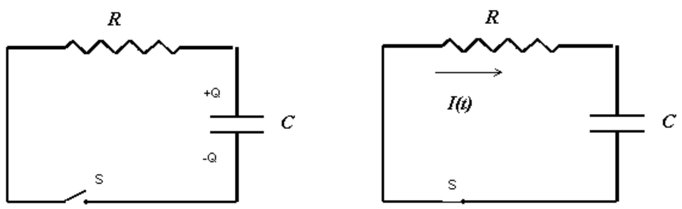
Consideremos ahora el circuito de la figura 2. Inicialmente el condensador tiene su carga máxima *Q*, figura 2a. Cuando se cierra la llave *S*, el condensador comienza a descargarse a través de la resistencia. Aplicando la segunda ley de Kirchhoff, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$-R\frac{dq}{dt}=\frac{q}{C} \qquad (7)$$

Integrando la ec. 7 se obtiene:

$$I(t)=-\frac{Q}{RC}e^{-t/\tau}$$

donde nuevamente $\tau=RC$ es la constante de tiempo del circuito.



(a) (b)

Figura 2

Circuitos para estudiar carga y descarga de un condensador.

- Interprete físicamente la constante τ.
- Hallar la expresión de $V_r(t)$ y $V_c(t)$ en el caso en que el voltaje proporcionado por la fuente sea constante, tanto para la carga como para la descarga del condensador.

1.3 Régimen sinusoidal.

Supongamos ahora que en vez de usar una fuente de voltaje continuo, utilizamos una fuente sinusoidal $V(t)=V_0 . \cos(\omega\ t)$, con frecuencia variable ω=2π*f*. En ese caso, todas las señales de corriente, carga y tensión variarán sinusoidalmente con la misma frecuencia *f*, impuesta por la fuente. Sustituyendo en la ec. 5, se obtiene:

$$\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{RC}=\frac{V_o \cos(\omega t)}{R} \qquad (8)$$

Una forma sencilla de resolver esta ecuación diferencial es introducir lo que se denomina notación fasorial, que nos permite transformar la ecuación diferencial, ec. 8, una ecuación algebraica. Consideramos para ello las magnitudes complejas:

$$\tilde{V}(t)=\tilde{V}_0 . e^{j\omega t},\ \ \tilde{Q}(t)=\tilde{Q}_0 . e^{j\omega t},\ \ \tilde{I}(t)=\tilde{I}_0 . e^{j\omega t}$$

donde $\tilde{V}_0$, $\tilde{Q}_0$ e $\tilde{I}_0$ son <u>complejos</u> cuyos módulos representan las amplitudes de las oscilaciones de las variables reales, y sus fases representan los defasajes (retardos) entre las distintas variables respecto a la fuente. Tomando la parte real de cada una de las magnitudes, podemos escribir las ecuaciones constitutivas de cada uno de los elementos del circuito RC:

$$\left(\begin{array}{c} v_R(t)=R\ i(t) \\ v_R(t)=\mathrm{Re}\left(V_R e^{j\omega t}\right) \end{array} \right) \Rightarrow \quad \tilde{V}_R=R\ \tilde{I}_0 \qquad (9)$$

$$\left(\begin{array}{c} v_C(t)=\frac{1}{C}\ q(t) \\ v_C(t)=\mathrm{Re}\left(V_C e^{j\omega t}\right) \\ q(t)=\mathrm{Re}\left(\frac{I_0}{j\omega} e^{j\omega t}\right) \end{array} \right) \Rightarrow \quad \tilde{V}_C=-jX_c \tilde{I}_0 \qquad (10)$$

donde X_c se denomina *reactancia* y está definida *como:* $X_c=\frac{1}{\omega . C}$.

El voltaje total está dado por: $V=\{\ \tilde{V}_c+\tilde{V}_R=(R-jX_c)\tilde{I}_o=Z\ \tilde{I}_o$ La magnitud $Z=R-jX_c$ se denomina *impedancia* del circuito.

La corriente $\tilde{I}_o$ está dada por:

$$\tilde{I}_0 . e^{j\omega t}=\frac{d(Q_0 . e^{j\omega t})}{dt}=j\omega . Q_0 . e^{j\omega t} \Rightarrow \tilde{I}_0=j\omega . \tilde{Q}_0$$

- Cómo determinaría el valor de la capacidad C a partir de las ec. 9 y 10?.

Sustituyendo las ec. 9 y 10 en la ec. 3 se obtiene:

$$\tilde{V}_0=\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)\tilde{I}_0 \qquad \tilde{I}_0=\frac{V_0}{\left(R-\frac{j}{\omega C}\right)}=|\tilde{I}_0| . e^{j\phi}$$

siendo:

$|\tilde{I}_0| = \dfrac{\tilde{V}_0}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}}$ la amplitud de la oscilación de corriente

$\phi = \text{arctg}\,\dfrac{1}{RC\omega}$ el defasaje de esta onda respecto a la de la fuente.

- Calcular el voltaje en el condensador V_c y en la resistencia V_R. (Módulo y fase)
- Existe alguna frecuencia para la cual $|V_r| = |V_c| = \dfrac{V_0}{\sqrt{2}}$?. Justifique su respuesta y discuta.
- Grafique $V_r(\omega)$. ¿Qué puede concluir?

1.- PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL.

1.4 Carga y descarga de un condensador.

- Arme el circuito mostrado en la figura 3 para estudiar la carga y descarga de un condensador.
- Releve la curva $V_c(t)$.
- Para el caso de descarga del condensador ajuste sus datos con el modelo teórico.
- Calcule el valor de la capacidad del condensador. Justifique el método utilizado.
- Para el caso de carga del condensador compare la curva teórica con la curva experimental.

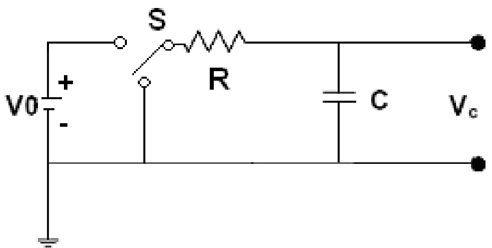


Figura 3.
Esquema del circuito experimental para estudiar carga y descarga de un condensador.

1.5 Régimen sinusoidal.

En esta parte de la práctica utilizaremos además de la interface, un osciloscopio para determinar las diferentes variables de interés.

- Armar un circuito RC utilizando una fuente sinusoidal, $V_o(\omega)$.
- Medir $V_R(\omega)$ y $V_C(\omega)$.
- Calcule la capacidad del condensador.
- Puede medir experimentalmente el desfasaje entre las señales $V_R(\omega)$, $V_C(\omega)$ y $V_o(\omega)$?
- Determine experimentalmente la frecuencia para la cual $|V_r| = |V_c|$ y el desfasaje de ambos.

1.- BIBLIOGRAFÍA.

- HALLIDAY, RESNICK Y KRANE, **Física**. Volumen 2, CECSA (1994).
- EDMINISTEr, J. **Circuitos eléctricos**, Serie Schaum.
- HOROWITZ & HILL, **Art of electronics.** 2º ed. Cambridge University Press, 1989.