Práctica Nº 3

1.-APÉNDICE: FIGURAS DE LISSAJOUS

Consideremos el movimiento bidimensional resultante de superponer dos vibraciones sinusoidales de igual frecuencia: una en la vertical y otra en la horizontal. En otras palabras, el movimiento determinado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \operatorname{sen}(\omega t) \\ y(t) &= A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \end{aligned} \qquad \text{(A.1)}$$

donde A_1 y A_2 son las respectivas amplitudes de las oscilaciones horizontal y vertical, ω es la frecuencia de las mismas, y δ es el *desfasaje* entre ambas.

Utilizando propiedades trigonométricas, se tiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \operatorname{sen}(\omega t) \\ y(t) &= A_2 \left(\operatorname{sen}(\delta)\cos(\omega t) + \cos(\delta)\operatorname{sen}(\omega t) \right) \end{aligned} \qquad \text{(A.2)}$$

Luego, eliminando t como parámetro en ambas ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\delta) = \operatorname{sen}^2(\delta) \qquad \text{(A.3)}$$

Esta ecuación describe la trayectoria resultante de superponer dos oscilaciones. Las curvas descriptas por la ecuación (A.3) son llamadas *figuras de Lissajous*[1].

Para $\delta=0$ y para $\delta=\pi$ la ecuación (A.3) se reduce a las rectas $y = \frac{A_2}{A_1}x$ e $y = -\frac{A_2}{A_1}x$, respectivamente. En cambio, para $\delta = \frac{\pi}{2}$ se tiene una elipse expresada en sus ejes propios, de la forma $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$. Para el caso genérico de δ cualquiera, la figura correspondiente a la ecuación (A.3) es una elipse expresada en unos ejes *rotados* un ángulo δ con respecto a los ejes propios de la elipse (Ver figura A.1).

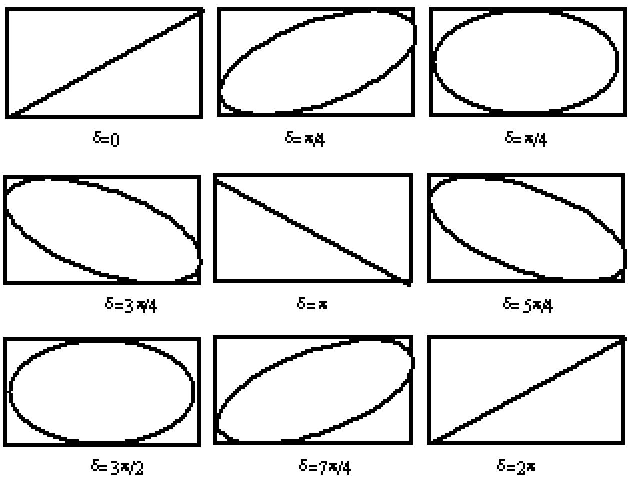

Figura A.1

Figuras de Lissajous para dos oscilaciones con igual frecuencia, para diferentes desfasajes.

[1] Las figuras de Lissajous en general, son las que se generan como trayectorias al superponer dos oscilaciones cualesquiera, no necesariamente de igual frecuencia. Sin embargo en este apéndice sólo estudiaremos estas últimas.

Ahora queremos medir el desfasaje δ entre $x(t)$ e $y(t)$ a partir de la figura de Lissajous correspondiente. Observamos que, (si la figura está centrada), cuando t=0 se tiene:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= A_2 \mathrm{sen}(\delta) \end{aligned} \qquad (A.4)$$

Luego, podemos despejar el desfasaje como:

$$\delta = \mathrm{Arcsen}\ \frac{y(0)}{A_2} \qquad (A.5)$$

En la figura AI.2 se tiene $h = 2y(0)$, puesto que h es la deflexión y cuando $x=0$ (t=0). Además $H=2A_2$, es la máxima deflexión y.

Figura A.2

Figura de Lissajous correspondiente a dos oscilaciones perpendiculares de igual frecuencia y desfasaje no nulo.

Por lo tanto, podemos despejar el desfasaje como:

$$\delta = \mathrm{Arcsen}\ \frac{h}{H} \qquad (A.6)$$

- Determine experimentalmente la frecuencia para la cual $|V_r|=|V_c|$ y el desfasaje de ambos.